Física I – Prova 3 – 04/07/2015

NOME____

MATRÍCULA________________________**TURMA**______________**PROF.**___________________________________

Lembrete:

*A prova consta de **2 questões discursivas** (que deverão ter respostas **justificadas**, desenvolvidas e demonstradas matematicamente) e **10 questões de múltipla escolha**. As questões discursivas valem 3,0 pontos e as de múltipla escolha valem 0,4 ponto.*

Utilize: $g = 9{,}80\ m/s^2$, **exceto se houver alguma indicação em contrário.**

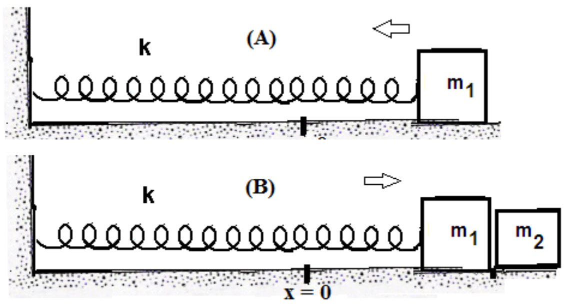
1. Questão

A figura (A) mostra um bloco de massa m_1 = 5,0kg, sobre uma superfície sem atrito, que está preso a uma mola horizontal cuja constante elástica é k = 50 N/m. O bloco é deslocado para a direita e é liberado em t =0, passando a mover - se para a esquerda. No instante t_o, o bloco passa pela primeira vez pela posição de equilíbrio, x = 0, com rapidez máxima v_{max} = 0,87 m/s.

(a)[0,8ponto] Qual é a amplitude da oscilação?

(b)[0,7ponto] Determine o instante $t_o$emsegundos.

Ao retornar à posição inicial de movimento, o bloco m_1 encontra-se com um bloco de massa m_2 = 1,0kg em repouso. O primeiro bloco gruda-se ao segundo, conforme a figura (B). Calcule, nas oscilações subsequentes,



(c) [1,0ponto] a amplitude

(d) [0,5ponto]a frequência angular .

Resolução:

Em um movimento harmônico simples, a equação mais geral para odeslocamento x(t) é dada pela expressão,

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0) \qquad (1)$$

uma vez que se inicia do repouso e deslocado de A da posição de equilíbrio, por conseguinte, a constante de fase da oscilação, ϕ_o, é nula. Devemos determinar A e a frequência angular ω para que a solução seja completa. A velocidade v(t) = dx(t)/dt é

$$v(t) = -\omega A sen(\omega t) \qquad (2)$$

(a) A rapidez máxima é

$$v_{max} = \omega A \,. \qquad (3)$$

A frequência angular é determinada pelos valores conhecidos do sistema massa-mola,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = \sqrt{\frac{50}{5,0}} = \sqrt{10} = 3,16 rad/s \,.$$ **[0,4 ponto]**

Pela eq.(3), a amplitude da oscilação é determinada uma vez que a rapidez máxima é conhecida,

$$A = \frac{v_{max}}{\omega}, \left[A = \frac{0,87}{3,16} = 0,27m \right]$$ **[0,4 ponto]**

(**b**) A rapidez é máxima quando sen(ωt) = 1 na eq.(2) , ou seja, no instante em que

$\omega t_o = \pi/2$. **[0,3 ponto]**

Assim, o tempo t_o é calculado

$$t_o = \frac{3,14}{2}\frac{1}{3,16} = 0,497$$

$$[t_o = 0,50s]$$ **[0,4 ponto]**

(c) Ao retornar na posição inicial de movimento, a velocidade do bloco m_1 é nula e continua o movimento com o bloco m_2 colado. O momento linear se conserva, pois não há forças externas na direção do movimeto, e ele é nulo tanto antes como depois da colisão. A energia cinética é nula tanto antes como depois da colisão, por que a velocidade do bloco m_1 é nula imediatamente antes da colisão e, imediatamente após, os blocos colados têm velocidade nula, como consequência da conservação do momento linear do sistema. A energia potencial elástica,$0,5kA^2$, não varia na colisão, pois inicia o movimento na mesma posição original. Conclui-se que a energia mecânica se conserva na colisão:

$$E_{antes} = E_{apos} \Rightarrow K_{antes} + U_{antes} = K_{apos} + U_{apos}$$

$$\frac{kA_{antes}^2}{2} = \frac{kA_{apos}^2}{2}$$ **[0,5 ponto]**

Da equação acima, obtemos a amplitude da oscilação dos blocos após a colisão que continua sendo a mesma antes da colisão:

$$\left[A_{apos} = A_{antes} = 0,27m\right]$$ **[0,5 ponto]**

(d) A massa do oscilador é m = $m_1 + m_2$ e podemos obter a frequência angular desse oscilador

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{50}{6}} \Rightarrow \omega = 2,9rad/s$$ **[0,5 ponto]**

2. Questão Duas estrelas idênticas , cada uma com massa M, formam um sistema estelar binário. Separadas pela distância 2R, as estrelas giram em torno do centro de massa do sistema. A órbita é circular, de modo que as duas estrelas estão sempre em lados opostos do círculo.

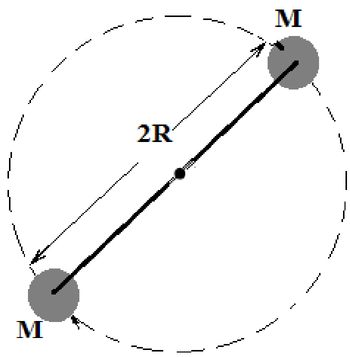
(a) [0,5ponto] Determine a posição do centro de massa do sistema binário.

(b) [0,7ponto] Calcule a força gravitacional de uma estrela sobre a outra.

(c) [1,0ponto] Qual é a velocidade orbital de cada estrela e o seu período?

(d) [0,8ponto] Qual deve ser a energia necessária para separar as duas estrelas até a distância infinita?

Resolução:



(a) A posição do centro de massa do sistema binário, conforme a figura, é

$$R_{cm} = \frac{M \times R + M \times R}{2M} = \frac{2MR}{2M} = R$$ **[0,5 ponto]** (1)

Este é o raio da órbita de cada estrela.

(b) De acordo com a lei de gravitação, a força de gravitação que atua sobre uma estrela é

$$F = \frac{GM^2}{(2R)^2} = \frac{GM^2}{4R^2}$$ **[0,7 ponto]** (2)

(c) Cada estrela está em órbita circular de raio R sob a ação da força gravitacional F, eq.(2), então a segunda lei de Newton permite escrever,

$$\frac{GM^2}{4R^2} = M\frac{v^2}{R} \qquad (3)$$

Explicitando v, a velocidade orbital é

$$v = \sqrt{\frac{GM}{4R}}$$ **[0,5 ponto]** (4)

A velocidade v é a distância $2\pi R$ percorrida durante o período T, tempo gasto em uma revolução,

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

Para obtermos uma expressão para T, usamos a eq. (4):

$$\frac{2\pi R}{T} = \sqrt{\frac{GM}{4R}}$$

Realizando algumas operações algébricas, obtemos o período orbital de uma estrela,

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$ **[0,5 ponto]** (5)

(d) A energia necessária para separar as estrelas a uma distância infinita é dada pela diferença entre a energia mecânica total da estrela binária em órbita, E_b, e a energia mecânica total, E_∞, quando as estrelas estão infinitamente separadas. A energia mecânica em órbita é

$$E_b = K_1 + K_2 + U = 2(\frac{Mv^2}{2}) - \frac{GM^2}{(2R)}$$

Usando a eq.(4), escrevemos

$$E_b = \frac{GM^2}{4R} - \frac{GM^2}{2R} = -\frac{1}{4}\frac{GM^2}{R}$$ **[0,4ponto]** (6)

A energia mecânica das estrelas no infinito é

$$E_\infty = K_{1\infty} + K_{2\infty} + U_\infty = 0 \qquad (7)$$

A energia necessária é obtida

$$W = E_\infty - E_b = \frac{1}{4}\frac{GM^2}{R}$$ **[0,4 ponto]** (8)